Charakterystyka dorobku naukowego Stanisława Lewanowicza

Zainteresowania naukowe Stanisława Lewanowicza dotyczą teorii i zastosowań numerycznych wielomianów ortogonalnych i funkcji specjalnych. Wiele uwagi poświęcił on badaniu własności rekurencyjnych współczynników szeregów ortogonalnych i pokrewnych funkcjonałów (tzw. momentów uogólnionych). Inny wątek jego badań dotyczy pewnych klas uogólnionych funkcji hipergeometrycznych, a także ich bazowych (kwantowych) odpowiedników. Wspomnieć należy również o zastosowaniach uzyskanych wyników teoretycznych, głównie w związku z aproksymacją funkcji i całkowaniem numerycznym.

1. Równania rekurencyjne i ich zastosowania

W swojej pracy doktorskiej (artykuł [**P6**] stanowi jej wersję publikacyjną) Lewanowicz rozwiązał postawiony przez Stefana Paszkowskiego problem wyznaczenia równania rekurencyjnego najniższego możliwego rzędu dla współczynników Gegenbauera rozwiązania równania różniczkowego. Algorytm doczekał się kilku realizacji w językach przekształceń symbolicznych; w kilku niedawnych publikacjach i pracy doktorskiej Alexandre'a Benoit[1] podano jego nową interpretację i bardzo szybką implementację. J. Wimp poświęca sporo miejsca w swojej monografii nt. równań rekurencyjnych omówieniu wyników pracy [**P6**][2].

Uogólnienie pomysłu na wypadek szeregu Jacobiego zawarto w pracach [**P12**], [**P18**], [**P21**], [**P22**]. W [**P37**] uogólniono wyniki z pracy [**P21**] na wypadek współczynników Fouriera względem dowolnego ciągu klasycznych wielomianów ortogonalnych. Realizacje algorytmów w języku Maple opisano w raportach [**R3**] i [**R5**].

W pracy [**P36**] rozważano analogiczne zadanie konstrukcji równania rekurencyjnego dla współczynników Fouriera względem dowolnego ciągu tzw. q-klasycznych wielomianów ortogonalnych funkcji spełniającej podane równanie różnicowe (ang. q-difference equation) o współczynnikach wielomianowych. Algorytmy realizujące zaproponowaną metodę konstrukcji podano w [**P40**].

W pracy [**P41**] zbadano jeszcze dalej idące uogólnienie; chodziło w nim o równania rekurencyjne dla współczynników Fouriera względem dowolnego ciągu semiklasycznych wielomianów ortogonalnych.

2. Funkcje hipergeometryczne

W pracy [**P16**] podano dla ciągu uogólnionych funkcji hipergeometrycznych

$$P_n := {}_{p+3}F_{p+2}\left(\begin{matrix} -n, n+\lambda, a_1, \ldots, a_p, 1 \\ b_1, \ldots, b_{p+2} \end{matrix} \,\middle|\, 1\right)$$

związek rekurencyjny niejednorodny rzędu p, jeśli $2+\lambda+\sum a_i = \sum b_j$ i rzędu $p+1$ – w przeciwnym razie. Wynik ten uzupełnia (w sposób nieoczekiwany, jak stwierdził J. Wimp[3]), ogólne twierdzenie Wimpa-Luke'a (1969), z którego wynika związek rzędu $p+2$ dla $\{P_n\}$. Jako wniosek otrzymano w [**P16**] związek rekurencyjny jednorodny rzędu q dla wielkości

$$U_n := {}_{q+2}F_{q+1}\left(\begin{matrix} n+\beta+1, c_1, \ldots, c_{q+1} \\ 2n+\lambda+1, d_1, \ldots, d_q \end{matrix} \,\middle|\, 1\right),$$

[1] A. Benoit, Algorithmique semi-numérique rapide des séries de Tchebychev, thèse de doctorat, École Polytechnique, Paris, Juillet 2012; A. Benoit, B. Salvy, Chebyshev expansions for solutions of linear differential equations, in Proc. of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation *ISSAC'09*, Ed. J.P. May, ACM, 2009, pp. 23–30.

[2] J. Wimp, *Computation with Recurrence Relations*, Pitman Press, Boston - London 1984, str. 196–202.

[3] J. Wimp, *Computation with Recurrence Relations*, London 1984, str. 159–160; J. Wimp, The umbral calculus and identities for hypergeometric functions with special arguments, in *Mathematical Essays in Honor of Gian-Carlo Rota*, Eds. B.E. Sagan, R.P. Stanley, Birkhäuser, Boston 1998, pp. 439–459.

prosto związanych (dla $\lambda := \alpha + \beta + 1$) ze współczynnikami Jacobiego funkcji

$$ {}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix} c_1, \dots, c_{q+1} \\ d_1, \dots, d_q \end{matrix} \,\Big|\, \frac{x+1}{2}\right). $$

Należy podkreślić, że wstępną wersję tych wyników uzyskano w raportach [**R1**] i [**R2**], stosując do pewnych funkcji hipergeometrycznych algorytm z pracy [**P6**] i jego odpowiednik dla rozwinięć w szereg Neumanna względem funkcji Bessela.

W pracy [**P14**] uproszczono równanie rekurencyjne i związek różniczkowo-rekurencyjny, podane przez Wimpa dla *uogólnionych wielomianów Jacobiego*

$$ Q_n(x) := {}_{p+2}F_q\left(\begin{matrix} -n, n+\lambda, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \,\Big|\, x\right) $$

i podano nowe, prostszy związek różniczkowo-rekurencyjny, spełniony przez Q_n.

W pracy [**P33**] podano wzór dla sumy szeregu hipergeometrycznego typu

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c \\ \frac{1}{2}(a+b+i+1),\, 2c+j \end{matrix} \,\Big|\, 1\right) $$

dla dowolnych a, b, $c \in \mathbb{C}$ oraz i, $j \in \mathbb{Z}$. Jest to uogólnienie klasycznego wyniku Watsona (wypadek $i = j = 0$). Ponadto podano uogólnienia klasycznych twierdzeń Whipple'a i Dixona dla funkcji ${}_3F_2$.

W pracy [**P35**] (zaproszony artykuł w sześciotomowym dziele *Numerical Analysis in the 20th Century*, Elsevier, 2000) udowodniono, że ciąg bazowych funkcji hipergeometrycznych typu

$$ F_k(\omega) := {}_{r+1}\phi_{s+1}\left(\begin{matrix} a_1q^k, \dots, a_rq^k,\, \alpha q^{k+1} \\ b_1q^k, \dots, b_sq^k,\, \alpha\beta q^{2k+2} \end{matrix} \,\Big|\, q; \omega q^{k(s+1-r)}\right). $$

spełnia równanie rekurencyjne rzędu $s+1$, jeśli $r = s+1$ i $\omega = q$, i rzędu $\max(r+1,\, s+2)$ w przeciwnym razie. Stanowi to uogólnienie twierdzenia Wimpa-Luke'a (1969) oraz wyników uzyskanych w [**P16**] – dla uogólnionych funkcji hipergeometrycznych.

3. Sprawy rodzinne wielomianów ortogonalnych: koneksje, stowarzyszenia ...

3.1. Własności wielomianów stowarzyszonych

Tematem pracy [**P17**] są wielomiany $W_n^{(\alpha,\beta)}$ stowarzyszone z wielomianami Jacobiego $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Podano m. in. równanie różniczkowe niejednorodne drugiego rzędu spełniane przez $W_n^{(\alpha,\beta)}$, współczynniki postaci potęgowej i współczynniki Jacobiego wielomianu $W_n^{(\alpha,\beta)}$ oraz związek rekurencyjny dla tzw. całek beta z $W_n^{(\alpha,\beta)}$.

Dwie prace poświęcono badaniom własności wielomianów stowarzyszonych (w wąskim sensie [**P23**], a następnie – uogólnionym [**P28**]) z dowolnymi klasycznymi wielomianami ortogonalnymi. Uzyskano pewną specjalną postać równania różniczkowego czwartego rzędu, spełnianego przez $(n-1)$-szy wielomian stowarzyszony, a także związek rekurencyjny drugiego rzędu, spełniany przez współczynniki identycznej z tym wielomianem kombinacji liniowej macierzystych wielomianów ortogonalnych. Zastosowanie tego wyniku dało m. in. nowe wyniki dla stowarzyszonych wielomianów Bessela.

W [**P30**] podano związki rekurencyjne, spełniane przez współczynniki koneksji wielomianów stowarzyszonych z dowolnymi klasycznymi wielomianami ortogonalnymi zmiennej dyskretnej z macierzystymi wielomianami.

Ulepszając wynik Letessiera i in. (1996) podano w [**P32**] dwie równoważne postaci operatorowe – wyznacznikową i niemal sfaktoryzowaną – oraz postać skalarną równania różnicowego czwartego rzędu, spełnianego przez n-ty wielomian stowarzyszony Meixnera, z rzeczywistym parametrem stowarzyszenia.

W [**P39**] zbadano własności równania różnicowego II rzędu spełnianego przez n-ty wielomian stowarzyszony z dowolnym ciągiem q-klasycznych wielomianów ortogonalnych (klasy Hahna). Korzystając z tego równania uzyskano związki rekurencyjne dla współczynników przedstawienia wielomianów stowarzyszonych jako kombinacji liniowych macierzystych wielomianów ortogonalnych.

3.2. Zagadnienia linearyzacji i koneksji

W [**P29**] podano zwartą postać związku rekurencyjnego drugiego rzędu dla współczynników linearyzacji iloczynu dwóch wielomianów, należących do rodziny klasycznych wielomianów ortogonalnych, scharakteryzowanej przez pewne ogólne własności (a nie konkretne wzory). Praca [**P31**] zawiera analogiczne wyniki w wypadku klasycznych wielomianów ortogonalnych zmiennej dyskretnej.

W [**P34**] podano operatorową postać związku rekurencyjnego spełnianego przez współczynniki koneksji pomiędzy rodzinami „klasycznych” wielomianów ortogonalnych zmiennej dyskretnej, określonych na siatce $x(s) = q^{2s}$.

W [**P38**] opisano metodę wyznaczania współczynników przedstawienia pochodnej względem parametru n-tego wielomianu z ciągu klasycznych wielomianów ortogonalnych, dowolnie wybranego w superklasie, zawierajacej bardzo klasyczne wielomiany, klasyczne wielomiany zmiennej dyskretnej i wielomiany kwantowe klasy Hahna.

4. Operatory rzutowe

Operator rzutowy, odwzorowujący przestrzeń $C[-1, 1]$ na podprzestrzeń Π_n wielomianów stopnia $\leqslant n$, może – jeśli ma małą normę – posłużyc do konstrukcji dobrego przybliżenia n-tego wielomianu optymalnego w sensie normy jednostajnej (por. przeglądową pracę [**P10**]). Przykładem może być klasyczny operator Fouriera-Czebyszewa S_n, który funkcji $f \in C[-1, 1]$ przyporządkowuje n-tą sumę częściową jej szeregu Czebyszewa.

W pracy [**P7**] podano modyfikację rzutu S_n, zmniejszającą jego normę. Własności tej modyfikacji badali m. in. Cheney i in.[4], co wykorzystano w pracy [**P9**] w związku z ogólniejszymi modyfikacjami operatora S_n.

W pracy [**P11**] wprowadzono m. in. taką rodzinę $J_n^{(m)}$ $(m \geqslant n+1)$ operatorów, że $J_n^{(m)} f$ jest n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C[-1, 1]$ w sensie ważonej aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze wszystkich punktów ekstremalnych wielomianu Czebyszewa T_m. Eksperymenty wykazały, że szczególnie obiecujący jest operator $M_n := J_n^{(2n+1)}$. W [**P24**] uzyskano realistyczne oszacowania z góry błędu aproksymacji funkcji $f \in C[-1, 1]$ za pomocą wielomianu $M_n f$.

Petras[5] udowodnił, że wprowadzone w pracach [**P9**], [**P11**] rodziny operatorów o nośniku skończonym mają ważną własność asymptotycznej minimalności, co może mieć nie tylko teoretyczne znaczenie.

5. Przyspieszanie zbieżności szeregów

Odrębny przedmiot badań stanowiło przyspieszanie zbieżności szeregów wolno zbieżnych. W pracy [**P27**], przygotowanej wspólnie z S. Paszkowskim, uzyskano nowe wyniki dla szerokiej klasy szeregów hipergeometrycznych typu

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\, b,\, 1 \\ d,\, e \end{matrix} \,\middle|\, \varepsilon\right) \qquad (\varepsilon = \pm 1). $$

[4] E.W. Cheney, J.H. McCabe, G.M. Phillips, A mixed-norm bivariate approximation problem with application to Lewanowicz operators (in *Multivariate Approximation*, ed. D. C. Handscomb, Academic Press, New York-London 1978, pp. 315-328).

[5] K. Petras, On norms of Lewanowicz operators, *J. Approx. Theory* 58 (1989), 107-113; K. Petras, On the minimal norms of polynomial projections, *J. Approx. Theory* 62 (1990), 206-212.

W odróżnieniu od istniejących *numerycznych* metod przyspieszania zbieżności, zaproponowana metoda pozwala uzyskać *analitycznie* nowe, szybko zbieżne rozwinięcia wielu funkcji specjalnych. Przykłady zastosowania tej metody w fizyce podali Oleksy i wsp. (1996).

W pracy [**P26**] zaproponowano prostą i skuteczną metodę sumowania bardzo wolno zbieżnych szeregów, badanych m. in. przez W. Gautschiego (1993), o wyrazie ogólnym postaci $k^\nu r(k)$ $(0 < \nu \leqslant 1)$, gdzie r jest funkcją wymierną.

6. Nowe rodziny wielomianów

6.1. Uogólnione wielomiany Bernsteina

W pracy [**P42**] wykazano, że współczynniki przedstawienia wielomianów Phillipsa-Bernsteina (ang. q-Bernstein polynomials) stopnia n jako kombinacji małych bazowych wielomianów Jacobiego (ang. little q-Jacobi polynomials) wyrażają się przez wartości bazowych wielomianów Hahna (ang. q-Hahn polynomials). Stanowi to uogólnienie znanego wzoru Ciesielskiego wiążącego klasyczne wielomiany Bernsteina, Jacobiego i Hahna.

W pracy [**P43**] wprowadzono dwuparametrową rodzinę *uogólnionych wielomianów Bernsteina*, zawierającą m. in. klasyczne wielomiany Bernsteina, dyskretne wielomiany Bernsteina i wielomiany Phillipsa-Bernsteina. Podano tożsamości łączące duże bazowe wielomiany Jacobiego, wielomiany bazowe Hahna i uogólnione wielomiany Bernsteina. H. Wang poświęcił dwie opublikowane niedawno prace[6] badaniu własności *uogólnionych operatorów Bernsteina*, zdefiniowanych przy użyciu naszych wielomianów.

W pracy [**P44**] zbadano bazę w przestrzeni wielomianów stopnia nie wyższego niż n, dualną względem uogólnionej bazy Bernsteina. Podano własności wielomianów bazowych, m. in. związek rekurencyjny oraz tożsamości wiążące te wielomiany z dużymi wielomianami q-Jacobiego i q-Hahna. W artykule [**P50**] podano wyrażenia dla współczynników Béziera (klasycznych) dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami, zawierające wartości wielomianów ortogonalnych Hahna, jak również – rekursywny schemat obliczania tych współczynników.

W pracy [**P46**] zdefiniowano uogólnione wielomiany Bernsteina wielu zmiennych, redukujące się w wypadku jednej zmiennej do wielomianów wprowadzonych w [**P43**]. Podano własności tych wielomianów, m.in. związek rekurencyjny, reguły q-różniczkowania, algorytm de Casteljau. Wskazano, że można wprowadzić uogólnienia klasycznego operatora Bernsteina na simpleksie, jak również operatora Durrmeyera-Bernsteina, których funkcjami własnymi są ortogonalne bazowe wielomiany Jacobiego wielu zmiennych. Podkreślono możliwość – w wypadku dwu zmiennych – efektywnej zamiany reprezentacji wielomianów: Bernsteina-Béziera na ortogonalną lub na odwrót, przy użyciu tożsamości wiążących uogólnione wielomiany Bernsteina z dużymi wielomianami q-Jacobiego (wprowadzonymi w pracy [**P48**]) i wielomianami q-Hahna. Wskazano na możliwe zastosowania w modelowaniu geometrycznym.

6.2. Wielomiany ortogonalne dwu zmiennych

Rozwiązując ważne dla zastosowań w grafice komputerowej zadanie w pracy [**P45**] wykazano, że wielomiany Koornwindera-Jacobiego, ortogonalne w obszarze trójkątnym, mają przedstawienie w postaci Béziera-Bernsteina, której współczynniki prosto wyrażają się przez wielomiany ortogonalne Hahna dwu zmiennych.

W artykule [**P48**] wprowadzono wielomiany dwu zmiennych, tzw. duże bazowe wielomiany Jacobiego (ang. big q-Jacobi polynomials), ortogonalne względem iloczynu skalarnego wyrażonego za pomocą tzw. całki Jacksona. Wielomiany te w naturalny sposób plasują się w hierarchii bazowych hipergeometrycznych wielomianów ortogonalnych dwu zmiennych, ustalonej w tzw. tablicy Askeya.

[6] H. Wang, Properties of convergence for ω, q-Bernstein polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 340 (2008), 1096–1108; H. Wang, Shape-preserving properties of ω, q-Bernstein polynomials, *Lin. Alg. Appl.* 430 (2009), 957–967.

Wykazano ortogonalność nowych wielomianów, a także podano związek rekurencyjny oraz cząstkowe równanie q-różnicowe, spełniane przez nie. W pracy [**P53**] dodano do tej listy tzw. relacje strukturalne, czyli macierzowo-wektorowe związki różniczkowo-rekurencyjne.

7. Metody matematyczne modelowania krzywych i powierzchni

Obniżanie stopnia krzywej lub powierzchni Béziera jest ważnym problemem grafiki komputerowej. Chodzi o ułatwienie przesyłu i wymiany danych między systemami projektowania grafiki, a także o kompresję danych. W pracy [**P47**] zaproponowano nowatorską metodę konstrukcji krzywej Béziera stopnia m, która najlepiej przybliża daną krzywą stopnia n ($m < n$) w sensie normy L_2, przy dodatkowych warunkach zgodności początkowych pochodnych w końcach przedziału aproksymacji. Dzięki użyciu dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina i wykorzystaniu ich związków z wielomianami ortogonalnymi Hahna (por. [**P44**]) obniżono rząd kosztu metody do $O(mn)$, co oznacza, że jest ona zdecydowanie tańsza od innych metod. W artykule [**P51**] opisano metodę obniżania stopnia prostokątnego płata powierzchni Béziera z ograniczeniami brzegowymi, stosującą dualne wielomiany Bernsteina i wielomiany ortogonalne Hahna jednej zmiennej. Ogólny charakter ograniczeń brzegowych pozwala na zastosowanie algorytmu do powierzchni złożonej z wielu gładko połączonych płatów w taki sposób, aby powierzchnia otrzymana po obniżeniu stopni płatów pozostała gładka (w zadanym sensie).

W pracy [**P49**] rozwiązano znacznie trudniejsze zadanie obniżania stopnia trójkątnego płata powierzchni Béziera z dodatkowymi warunkami dotyczącymi zachowania się płatów na brzegu obszaru. Warunki te, sformułowane w języku punktów kontrolnych płata, mają łatwą interpretację geometryczną. Pozwala to obniżyć stopnie gładko połączonych wielu płatów trójkątnych, bez utraty gładkości powierzchni złożonej. Tym razem użyto dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina dwu zmiennych i ich związków z wielomianami ortogonalnymi Hahna dwu zmiennych (por. [**P46**]); koszt metody jest rzędu $O(m^2n^2)$.

W artykule [**P52**] opisano efektywną metodę aproksymacji wymiernej krzywej Béziera za pomocą wielomianowej krzywej Béziera, przy ograniczeniach brzegowych. Opracowany algorytm korzysta z rekursywnych własności dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami.

8. Metody numeryczne

Na początku pracy naukowej S. Lewanowicz zajmował się implementacją algorytmów rozwiązywania układów równań liniowych [**P2**], równań różniczkowych zwyczajnych [**P4**] i cząstkowych [**P5**]. W tym nurcie mieszczą się również prace związane z zastosowaniem metod numerycznych w optyce [**P1**] i medycynie [**P3**].

W tzw. uogólnionej metodzie Clenshawa-Curtisa całkowania funkcji postaci ωf, gdzie f jest funkcja rozwijalną w szereg Czebyszewa, a ω – szybkooscylującą lub osobliwą, pojawia się zadanie wyznaczenia z dużą dokładnością *momentów Czebyszewa*, tj. całek zawierających ω i wielomiany Czebyszewa. W pracy [**P8**] podano optymalny algorytm konstrukcji – przy pewnych ogólnych założeniach o funkcji ω – równania rekurencyjnego dla *momentów Gegenbauera*; inny algorytm (łatwiejszy w realizacji, choć nie zawsze optymalny) zawiera praca [**P15**]; wariant algorytmu dla równań różniczkowych niskiego rzędu podano w [**P25**].

W pracy [**P13**] podano modyfikację metody Piessensa-Verbaetena (1973) rozwiązania równania całkowego Abela, stosującą momenty Czebyszewa; uzyskano redukcję kosztów metody o jedną trzecią. Podobne wyniki dla uogólnionego równania całkowego Abela zawiera praca [**P19**].

W pracy [**P20**] zaproponowano metodę obliczania całek postaci $\int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta f(x) J_\nu(ax)\,dx$, gdzie J_ν jest funkcją Bessela I rodzaju. Rozwijając funkcję f w szereg względem przesuniętych wielomianów Jacobiego $R_k^{(\alpha,\beta+\nu)}$, a funkcję J_ν – w szereg Czebyszewa, zredukowano zadanie do rekursywnego obliczania *momentów Jacobiego*.

Wykaz prac naukowych

Opublikowane prace oryginalne

[**P1**] A method for determining optical constants of thin films (*wspólnie z* E. Dobierzewską-Mozrzymas i J. Mozrzymasem), *Acta Physica Polonica* A41 (1972), 251–257.

[**P2**] Solving systems of linear equations by Sokolov's method. Algorithm 29, *Zastosowania Matematyki* 14 (1974), 127–135.

[**P3**] Application of numerical methods for multipole description of the electrical field of the heart (*wspólnie z* J. Jagielskim i J. Mozrzymasem), *Control and Cybernetics* 3 (1974), 37–49.

[**P4**] Solution of a first-order nonlinear differential equation in Chebyshev series. Algorithm 47, *Zastosowania Matematyki* 15 (1976), 251–269.

[**P5**] Solving boundary value problems for the biharmonic equation by the method of summary representation. Algorithm 48, *Zastosowania Matematyki* 15 (1976), 397–413.

[**P6**] Construction of a recurrence relation of the lowest order for coefficients of the Gegenbauer series, *Zastosowania Matematyki* 15 (1976), 345–396.

[**P7**] A projection connected with the Fourier-Chebyshev operator, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* 26 (1978), 727–732.

[**P8**] Construction of a recurrence relation for modified moments, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 5 (1979), 193–206.

[**P9**] Properties of some polynomial projections, *Journal of Approximation Theory* 27 (1979), 313–328.

[**P10**] Minimalne operatory rzutowe, *Roczniki PTM. Seria III: Matematyka Stosowana* 15 (1979), 25–46.

[**P11**] Some polynomial projections with finite carrier, *Journal of Approximation Theory* 34 (1982), 249–263.

[**P12**] Construction of the lowest order recurrence relation for the Jacobi coefficients, *Zastosowania Matematyki* 17 (1983), 655–675.

[**P13**] Applications of modified moments in the numerical solution of the Abel integral equation, *Zastosowania Matematyki* 18 (1984), 311–317.

[**P14**] On the differential-difference properties of the extended Jacobi polynomials, *Mathematics of Computation* 44 (1985), 435–441.

[**P15**] Recurrence relations for modified moments, *Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia* 8 (1985), 49–60.

[**P16**] Recurrence relations for hypergeometric functions of unit argument, *Mathematics of Computation* 45 (1985), 521–535. Errata *ibid.* 48 (1987), 853.

[**P17**] Properties of the polynomials associated with the Jacobi polynomials, *Mathematics of Computation* 47 (1986), 669–682.

[**P18**] Recurrence relations for the coefficients in Jacobi series solutions of linear differential equations, *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 17 (1986), 1037–1052.

[**P19**] On the numerical solution of the generalized Abel integral equation, *Zastosowania Matematyki* 20 (1990), 597–605.

[**P20**] Evaluation of Bessel function integrals with algebraic singularities, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 37 (1991), 101–112.

[**P21**] A new approach to the problem of constructing recurrence relations for the Jacobi coefficients, *Zastosowania Matematyki* 21 (1991), 303–326.

[**P22**] Quick construction of recurrence relations for the Jacobi coefficients, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 43 (1992), 355–372.

[**P23**] Results on the associated Jacobi and Gegenbauer polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 49 (1993), 137–144.

[**P24**] Error bounds for a near-minimax approximation, *BIT* 33 (1993), 151–157.

[**P25**] A fast algorithm for the construction of recurrence relations for modified moments, *Applicationes Mathematicae* 22 (1994), 359–372.

[**P26**] A simple approach to the summation of certain slowly convergent series, *Mathematics of Computation* 63 (1994), 741–745.

[**P27**] An analytic method for convergence acceleration of certain hypergeometric series (*wspólnie z* S. Paszkowskim), *Mathematics of Computation* 64 (1995), 691–713.

[**P28**] Results on the associated classical orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 65 (1995), 215–231.

[**P29**] Second-order recurrence relation for the linearization coefficients of the classical orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 69 (1996), 159–170.

[**P30**] Recurrence relations for the connection coefficients of orthogonal polynomials of a discrete variable, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 76 (1996), 213–229.

[**P31**] Linearization of product of orthogonal polynomials of a discrete variable (*wspólnie z* S. Belmehdim i A. Ronveaux), *Applicationes Mathematicae* 24 (1997), 445–455.

[**P32**] On the fourth-order difference equation for the associated Meixner polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 80 (1997), 351–358.

[**P33**] Generalized Watson's summation formula for a ${}_3F_2(1)$, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 86 (1997), 375–386.

[**P34**] Recurrence relations for the connection coefficients of orthogonal polynomials of a discrete variable on the lattice $x(s) = q^{2s}$, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 99 (1998), 275–286.

[**P35**] Recursion formulae for basic hypergeometric functions, in *Numerical Analysis in the 20th Century*, Vol. 1, eds. J. Wimp and L. Wuytack, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 121 (2000), 297–312.

[**P36**] Recurrence relations for the coefficients of the Fourier series expansions with respect to q-classical orthogonal polynomials (*wspólnie z* E. Godoyem, I. Areą, A. Ronveaux i A. Zarzo), *Numerical Algorithms* 23 (2000), 31–50.

[**P37**] Recurrences for the coefficients of series expansions with respect to classical orthogonal polynomials, *Applicationes Mathematicae* 29 (2002), 97–116.

[**P38**] Representations for the parameter derivatives of the classical orthogonal polynomials, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Ser. II, Suppl. 68 (2002), 599–613.

[**P39**] Representations for the first associated q-classical orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 150 (2003), 311-327.

[**P40**] Construction of recurrences for the coefficients of expansions in q-classical orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 153 (2003), 295–309.

[**P41**] Recurrence relations for the coefficients in series expansions with respect to semi-classical orthogonal polynomials (*wspólnie z* P. Woźnym), *Numerical Algorithms* 35 (2004), 61–79.

[**P42**] Formulae relating little q–Jacobi, q–Hahn and q–Bernstein polynomials: Application to the q-Bézier curve evaluation (*wspólnie z* E. Godoyem, I. Areą, P. Woźnym i A. Ronveaux), *Integral Transforms and Special Functions* 15 (2004), 375–385.

[**P43**] Generalized Bernstein polynomials (*wspólnie z* P. Woźnym), *BIT Numerical Mathematics* 44 (2004), 63–78.

[**P44**] Dual generalized Bernstein basis (*wspólnie z* P. Woźnym), *Journal of Approximation Theory* 138 (2006), 129–150.

[**P45**] Connections between two-variable Bernstein and Jacobi polynomials on the triangle (*wspólnie z* P. Woźnym), *Journal of Computational and Applied Mathematics* 197 (2006), 520–533.

[**P46**] Multivariate generalized Bernstein polynomials. Identities for orthogonal polynomials of two variables (*wspólnie* z P. Woźnym, I. Areą i E. Godoyem), *Numerical Algorithms* 48 (2008), 199–220.

[**P47**] Multi-degree reduction of Bézier curves with constraints, using dual Bernstein basis polynomials (*wspólnie* z P. Woźnym), *Computer Aided Geometric Design* 26 (2009), 566-579.

[**P48**] Two-variable orthogonal polynomials of big q-Jacobi type (*wspólnie* z P. Woźnym), *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233 (2010), 1554-1561.

[**P49**] Constrained multi-degree reduction of triangular Bezier surfaces using dual Bernstein polynomials (*wspólnie* z P. Woźnym), *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235 (2010), 785–804.

[**P50**] Bézier representation of the constrained dual Bernstein polynomials (*wspólnie* z P. Woźnym), *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011), 4580–4586.

[**P51**] Multi-degree reduction of tensor product Bézier surfaces with general constraints (*wspólnie* z P. Woźnym), *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011), 4596–4611.

[**P52**] Polynomial approximation of rational Bézier curves with constraints (*wspólnie* z P. Woźnym i P. Kellerem), *Numerical Algorithms* 59 (2012), 607–622.

[**P53**] Structure relations for the bivariate big q-Jacobi polynomials (*wspólnie* z P. Woźnym i R. Nowakiem), *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013), 8790-8802.

Inne publikacje

[**K1**] Moduł CN: Całkowanie numeryczne (*wspólnie* z G. Hardt-Olejniczak i A. Olejniczakiem), [w:] *Elementy informatyki, pakiet oprogramowania edukacyjnego*, t. 2, *System MET-NUM*, red. M.M. Sysło, Uniw. Wrocł. i OFEK, Wrocław-Poznań 1992, s. 47–76.

[**K2**] Moduł PF: Przybliżanie funkcji (*wspólnie* z G. Hardt-Olejniczak, W. Karczewskim i A. Olejniczakiem), [w:] *Elementy informatyki, pakiet oprogramowania edukacyjnego*, t. 2, *System MET-NUM*, red. M.M. Sysło, Uniw. Wrocł. i OFEK, Wrocław-Poznań 1992, s. 13–45.

[**K3**] *Metody numeryczne* (objaśnienia 106 haseł w pracy zbiorowej *Encyklopedia techniki. Podstawy techniki*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994).

Nieopublikowane prace

[**R1**] Recurrence relations for coefficients of expansions in Bessel functions, Rap. N-57, Inst. Inf. Uniw. Wrocł., Wrocław, 1979.

[**R2**] Recurrence relations for the Jacobi coefficients of certain hypergeometric functions, Rap. N-107, Inst. Inf. Uniw. Wrocł., Wrocław, 1982.

[**R3**] Construction of recurrence relations for the Jacobi coefficients, using Maple (*wspólnie* z J. Witkowskim), Inst. Inf. Uniw. Wrocł., Wrocław, 1995.

[**R4**] The hypergeometric function approach to the connection problem for the classical orthogonal polynomials, Inst. Inf. Uniw. Wrocł., Wrocław, 1998, rev. 2002.

[**R5**] Algorithms for construction of recurrence relations for the coefficients of expansions in series of classical orthogonal polynomials (*wspólnie* z P. Woźnym), Inst. Inf. Uniw. Wrocł., Wrocław, 2001.